567. 二重ノ近傍系ニヨル收斂ノ定義ニ就テ, I

角谷　静夫（阪大）

1. 空間Rノ各点aニ對シテソノ近傍系$\{U(a)\}$, $\{V(a)\}$ガ與ヘラレテ、コレラハ夫々次ノ條件ヲ滿足スルモノトスル。

1—1° 任意ノ$U(a)$ハaヲ含ム。

1—2° 任意ノ$U_1(a)$, $U_2(a)$ニ對シテ$U_3(a)$ガ存在シテ$U_3(a) \subset U_1(a) \cdot U_2(a)$トナル。

1—3° 任意ノa, b $(a \neq b)$ニ對シテ$U(a) \cdot U(b)$トナル如キ近傍$U(a)$, $U(b)$ガ存在スル。

2—1° 任意ノ$V(a)$ハaヲ含ム。

2—2° 任意ノ$V_1(a)$, $V_2(a)$ニ對シテ$V_3(a)$ガ存在シテ$V_3(a) \supset V_1(a) + V_2(a)$トナル。

2—3° 任意ノa, b $(a \neq b)$ニ對シテ$b \in V(a)$トナル$V(a)$ガ存在スル。

此ノ如キ近傍系ヲ持ツタ空間Rニ於テ点列$\{a_n\}$ガaニ收斂スルトイフノハ、スベテノa_nヲ含ム$V(a)$ガ少クトモ一ツ存在シテ、且ツ任意ノ$U(a)$ガ殆ンドスベテノa_nヲ含

ムコトデアルト定義スル。

コレヲ $\mho\nabla$ー收斂ト名付ケ $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 又ハ

$a_n \xrightarrow[\mho\nabla]{} a$ ニヨッテ表ハス。

コノ $\mho\nabla$ー收斂ガ次ノ性質ヲ持ツコトハ明カデアル。

(1) $a_n = a,\ n = 1, 2, \cdots\cdots$ ナラバ $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} a_n = a$

(2) $\mho\nabla\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ナラバ任意ノ部分列 $\{a_{k_n}\}$ ニ對シテ $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ デアル。

(3) $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} a_n = b$ ナラバ $a = b$ デアル。即チ一ツノ点列ハ二ツノ異ナル点ニ同時ニ收斂スルコトハ出來ナイ。

(4) $\mho\nabla-\lim a_n = a$, $\mho\nabla-\lim b_n = a$ ナラバ $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$ ニ對シテ $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} c_n = a$ デアル。

以上ハ何レモ普通ノ收斂ノ時ト同ジ性質デアル。更ニ次ノコトモ明カデアル。

(5) $\mho\nabla-\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ナラバ $\mho-\lim_{n\to\infty} a_n = a$ デアル。
但シコヽニ $\mho-\lim$ ハ普通ニ $\{\mho(a)\}$ ノミニヨッテ定義サレル近傍空間ニ於ケル收斂ヲ表ハス。

此ノ如ク收斂ガ定義サレタ空間ヲ $\mho\nabla$ー空間ト呼ビコノ空間ノ性質ヲ調ベル。コノタメニ $\{\nabla(a)\}$ ガ次ノ性質ヲ持ツテヰルコトヲ假定スル。

(※) $\{U(a)\}$ ノウチニ可附番個ノ $\{V_n(a)\}$ $(n=1,2,\dots)$
ガ存在シテコレガ

$$V_1(a)\subset V_2(a)\subset\cdots\cdots\subset V_n(a)\subset V_{n+1}(a)\subset\cdots\cdots$$

ヲ満足シ且ツ任意ノ $V(a)$ ニ對シテ n ガ定マリ
$V(a)\subset V_n(a)$ トナルモノトスル。

コノ性質ハ Hausdorff ノ第一可附番公理ニ相當スルモノデアルカラ之レヲ äusseres Abzählbarkeitsaxiom ト名付ケル。コノ Axiom ガ満足サレテヰルコトハ非常ニ大切ナコトデ後デ示スゴトクコノ Axiom ヲ満足シナイ UV-空間ニハ変ッタモノガ存在スル。

先ヅ äusseres Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足スル空間ニ於テハ適當ニ新シイ近傍系 $\{O(a)\}$ ヲ定義スレバ $O(a)$ ニヨッテ定義サレタ収斂ト上記ノ UV-収斂トガ一致スルコトヲ示サウ。

カヽル $O(a)$ ハ次ノ如ク定義スレバヨイ。各々ノ n ニ對シテ任意ニ $U_n(a)$ ヲ取リ

$$O(a)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)\cdot V_n(a)$$

トオク。$U_n(a)$ ノ取リ方ハ各々ノ n ニ対シテ全ク任意デアルカラ、若シ $\{U(a)\}$ ノ Mächtigkeit ヲ $\mathfrak{m}$ デ表ハセバ $\{O(a)\}$ ノ Mächtigkeit ハ $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$ デアル筈デアル。
此ノ如ク定義サレタ近傍 $O(a)$ ガ近傍トシテノ普通ノ性質 1—1°, 1—2°, 1—3° ヲ満足シテヰルコトハ明カデアル。シカシ Hausdorff ノ四番目ノ條件:

1—ポ 任意ノ $O(a)$ 及ビ $b\in O(a)$ ナル任意ノ b ニ対シ

テ $O(b)\subset O(a)$ ナル $O(b)$ が存在スル。

ハタトヘコレが始メノ $\{U(a)\}$ ニ対シテ成立シテキル場合

デモ $\{O(a)\}$ ニ対シテハ成立シナイ。

又 $\{U(a)\}$ が Hausdorff ノ第一可附番公理ヲ満足シテキテモ $\{O(a)\}$ ハソレヲ満足スルトハ限ラナイ。

次ニ $\{O(a)\}$ ニヨル収斂ノ定義ト UV-Konvergenz トが同等デアルコトヲ示サウ。

(i) $a_n \xrightarrow[UV]{} a$ ナラバ任意ノ $O(a)$ ハ殆ンドスベテノ a_n ヲ含ムコト。

$a_n \rightarrow_{UV} a$ ナル故少クトモ一ツ $V(a)$ が存在シテコレハスベテノ a_n ヲ含ンデキル。äusseres Abzählbarkeits axiom ヨリ $V(a)\subset V_{n_0}(a)$ トナル如キ n_0 が存在スル。然ルニ一方又 $a_n \longrightarrow_{UV} a$ ヨリ任意ノ $U(a)$ ハ殆ンドスベテノ a_n ヲ含ムカラ $U_{n_0}(a)$ ヲ如何ニトッテモ $U_{n_0}(a)\cdot V_{n_0}(a)$ ハ殆ンドスベテノ a_n ヲ含ム。ヨッテ勿論任意ノ

$$O(a)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)\cdot V_n(a)$$

ハ殆ンドスベテノ a_n ヲ含ム。

(ii) $a_n \not\rightarrow_{UV} a$ ナラバ少クトモ一ツノ $O(a)$ ニ対シテ無限ニ多クノ a_n が $O(a)$ ニ属シナイコト。

コレハ次ノ二ツノ場合ニワケテ考ヘル。

(a) a_n ヲスベテ含ム $U_{n_0}(a)$ が存在スルトキ。

$a_n \not\rightarrow_{UV} a$ ヨリ少クトモ一ツノ $U_0(a)$ が定マリ

$U_0(a)$ ニ属シナイ a_n ガ無限ニ存在スル。今各々ノ n ニ対シテ $U_n(a) = U_0(a)$ トオケバ。

$$O(a) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)\cdot V_n(a) = U_0(a) \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)$$
$$= U_0(a)$$

トナリ明カニ $O(a)$ ニ属シナイ a_n ハ無限ニ澤山存在スル。

(β) 各々ノ n ニ対シテ $V_n(a)$ ニ属シナイ a_{k_n} ガ少クトモ一ツ存在スルトキ。

äusseres Abzählbarkeits axiom ヨリ

$\{a_{k_n}\}$ ハ無限ニ多クノ異ル点ヲ持ッテキル。

今各々ノ n ニ對シテ $U_n(a)$ ヲ、コレガ $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots\cdots a_{k_n}$ ヲ何レモ含マナイヤウニトレバ

$$O(a) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)\cdot V_n(a)$$

ハ a_{k_n} ノ点ヲ一ツモ含マナイ。(何トナレバ $a_{k_n} \in U_m(a)$ $V_m(a)$ ナラバ一方 $a_{k_n} \in U_m(a)$ ヨリ $n > m$ デナケレバナラズ、他方 $a_{k_n} \in V_m(a)$ ヨリ $n < m$ デナケレバナラヌカラ)。

ヨッテ $O(a)$ ニ属シナイ a_n ガ無限ニ澤山存在スル。

以上ノ事實ヨリ次ノコトガワカル。

(6) $a_n \not\to_{UV} a$ ナラバ $\{a_n\}$ ノ部分列 $\{a_{k_n}\}$ ガ存在シテコノ如何ナル部分列モ a ニ UV 一收

歓シナイ。